সংখ্যার
অসংখ্য খেলা
অরূপরতন ভট্টাচার্য

সংখ্যার অসংখ্য খেলা

অরূপরতন ভট্টাচার্য

দে'জ পাবলিশিং ॥ কলিকাতা ৭০০০৭৩

প্রথম প্রকাশ :
—পৌষ, ১৩৮৭
—জানুয়ারি, ১৯৮১
পঞ্চম সংস্করণ :
—ফাল্গুন, ১৩৯৪
—ফেব্রুয়ারি, ১৯৮৮

প্রকাশক :
সুধাংশুশেখর দে
দে'জ পাবলিশিং
১৩ বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট
কলিকাতা ৭০০০৭৩

প্রচ্ছদ :
গৌতম রায়

মুদ্রাকর :
তাপসকুমার হাটাই
নিউ তুষার প্রিন্টিং ওয়ার্কস
২৬ বিধান সরণী
কলিকাতা ৭০০০০৬

দাম : ৮ টাকা

বুবাই ও ভুটুনকে

সংখ্যার সৃষ্টির পর থেকে আজ পর্যন্ত তাকে নিয়ে কম খেলা হয়নি। দেশ, কালের সীমা ছাড়িয়ে গণিতবিদেরা এসে মিলেছেন সেই খেলায়। এ শুধু নীরস, ভাল না লাগা, ১, ২, ৩, ৪ বা লসাগু, গসাগু, বর্গমূল, ঘনমূল নয়। সংখ্যা যে কত বিচিত্র, কত মজার, কত অভিনব হতে পারে, সে-ও যে ভাল লাগার মত, তাকেও যে মনে ধরে রাখা যায়, এ বইয়ের পাতায় পাতায় তার পরিচয়।

এ বই খেলার ছলে গবেষণার বই।

আনন্দমোহন কলেজ
কলিকাতা ৭০০০০৯
২. ১. ৮১

অরূপরতন ভট্টাচার্য

এই লেখকের অন্যান্য বই :

অঙ্ক নিয়ে বুদ্ধিবিচার
সেকালে এদেশে বিজ্ঞানচর্চা
বিজ্ঞানীর নোটবুক
অণু পরমাণুর দেশে
প্রাচীন ভারতে জ্যোতির্বিজ্ঞান (রবীন্দ্র পুরস্কারপ্রাপ্ত ১৯৮৬)
প্রাচীন ভারতে গণিত
বিজ্ঞানীর দপ্তর
পৃথিবীর বাইরে কি বুদ্ধিমান জীব আছে ?
বিজ্ঞান জিজ্ঞাসুর ডায়েরি
আকাশ চেনো
রম্য গণিত
আমরা কেন আমাদের মত দেখতে
গল্পে গল্পে বিজ্ঞান
নিউটন গেলেন আইনস্টাইন এলেন
কাঠি নিয়ে কঠিন খেলা
বৈঠকী ধাঁধার খেলা
ধাঁধা নিয়ে মজার খেলা

সংখ্যার অসংখ্য খেলা

যে সংখ্যার খুঁত নেই ঃ

হ্যাঁ, এ রকম সংখ্যার বিদেশী নাম পারফেক্‌ট নামবার। পারফেক্‌টের অর্থ ই, যে নিখুঁত।

সংখ্যার তো শেষ নেই। ঋণাত্মক, ধনাত্মক নিয়ে তার রাজত্ব সীমাহীন। এই বিরাট রাজত্বের ভেতর থেকে বিজ্ঞানীরা আজ পর্যন্ত মাত্র কয়েকটি ওই রকমের সংখ্যার হদিশ পেয়েছেন। পারফেক্‌ট নামবার কাকে বলে ? একটি পারফেক্‌ট নামবার জানবার জন্যে কি করব, কোথায়, কী ভাবে, খুঁজে বেড়াব তাকে ?

কোনো সংখ্যার যতগুলি ভাজক আছে, সেই ভাজকগুলির যোগফল যদি মূল সংখ্যার সমান হয়, তাহলে মূল সেই সংখ্যাটি একটি পারফেক্‌ট নামবার।

উদাহরণ ?

৬—এই সংখ্যাটি। ৬-এর বিভাজক কি কি ? ১, ২ আর ৩। যোগফল ১+২+৩=৬। অর্থাৎ ৬ একটি পারফেক্‌ট নামবার এবং এটিই হল প্রথম পারফেক্‌ট নামবার।

প্রথম পারফেক্‌ট নামবার পাবার পরে একটু সাহস সঞ্চয় করে দ্বিতীয় এই ধরনের সংখ্যার খোঁজ করা যাক।

সংখ্যার জগতে দ্বিতীয় পারফেক্‌ট নামবার ২৮। মিলিয়ে নিই। ২৮-এর বিভাজক ১, ২, ৪, ৭, ১৪। যোগফল ১+২+৪+৭+১৪ =২৮।

এখন আমরা যদি উদ্যোগী হয়ে তৃতীয় পারফেক্ট নামবারের খোঁজ করি তো অনেক দূর এগোতে হবে। ১০০-এর মধ্যে আর নেই। ২০০ এবং ৩০০-এর মধ্যেও নয়। ৪৯৬ সংখ্যাটির বিভাজক নিয়ে দেখব, সেটিই হচ্ছে তৃতীয় ওই রকমের সংখ্যা।

দেখি ৪৯৬-এর বিভাজক কী কী ?

১, ২, ৪, ৮, ১৬, ৩১, ৬২, ১২৪ এবং ২৪৮। এদের যোগফল নিঃসন্দেহে ৪৯৬।

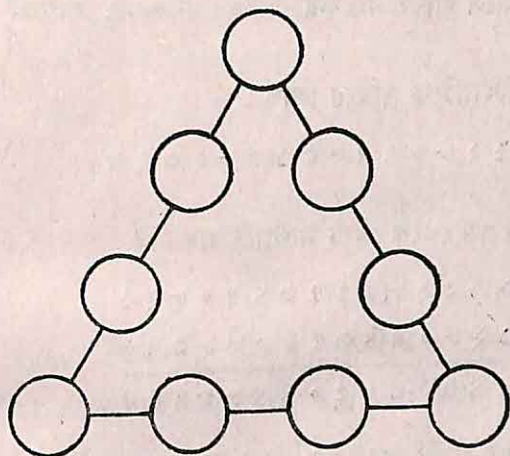
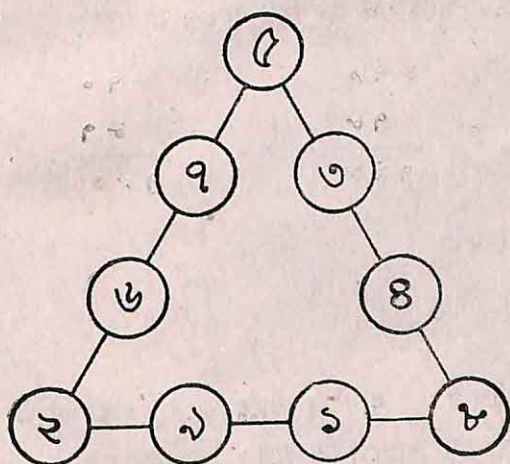
চেষ্টা করে পরের পারফেক্ট নামবার বের করা সহজ কথা নয়। সহস্রের ঘরে আছে সেই সংখ্যা এবং তা হল ৮১২৮।

দেখো দেখি : পরের পারফেক্ট নামবার কি হবে, পারবে কি তা বের করতে ?

না, তা পারার কথা নয়। প্রথম চারটে পারফেক্ট সংখ্যা প্রথম শতাব্দীর গোড়ার মধ্যেই গণিত পণ্ডিতেরা জেনে ফেলেছিলেন। কিন্তু পঞ্চম পারফেক্ট সংখ্যাটি জানতে বেশ কয়েক শতাব্দী কেটে গিয়েছিল।

এই সংখ্যাটি হল ৩৩, ৫৫০, ৩৩৬।

যোগফল ২০ ঃ

১ থেকে ৯ পর্যন্ত সংখ্যাকে ত্রিভুজের বাহুর উপরের বৃত্তগুলির মধ্যে এমনভাবে বসাও যাতে যে কোনো বাহুর উপরে যোগফল দাঁড়ায় ২০ ।

এর একটা সমাধান ।

দেখো দেখি ঃ এর আরও একটা সমাধান আছে । সেই সমাধানটা বের করো ।

৯কে নিয়ে :

যে কোনো সংখ্যা, যত বড়, যেমন ইচ্ছে কল্পনা করা যাক :

৬ ৭ ৩ ২ ৮ ৯ ১ ৫ ৬ ৪ ৭ ০ ৮ ২ ১

ইচ্ছে হলে আরও বড় করা যায়। কিন্তু না, এখানেই থাক।

এই সংখ্যাটিকে ঘুরিয়ে লিখি :

১ ২ ৮ ০ ৭ ৪ ৬ ৫ ১ ৯ ৮ ২ ৩ ৭ ৬

এবারে বড় থেকে ছোট সংখ্যাটি বাদ দিই

```
 ৬ ৭ ৩ ২ ৮ ৯ ১ ৫ ৬ ৪ ৭ ০ ৮ ২ ১
-১ ২ ৮ ০ ৭ ৪ ৬ ৫ ১ ৯ ৮ ২ ৩ ৭ ৬
---------------------------------
 ৫ ৪ ৫ ২ ১ ৪ ৫ ০ ৪ ৪ ৮ ৮ ৪ ৪ ৫
```

এই বিয়োগফল অবশ্যই ৯ দিয়ে ভাগ করলে মিলবে।

যদি ৮৭০ থেকে ৭৮ বাদ দিই বা ৮৭ তাহলে ?

```
 ৮ ৭ ০        ৮ ৭ ০
   ৭ ৮          ৮ ৭
------       ------
 ৭ ৯ ২        ৭ ৮ ৩
```

হ্যাঁ, তাহলেও।

দেখো দেখি : যদি দু ধারে দুটো অঙ্ক থাকে আর মাঝের সবগুলো শূন্য হয়, তাহলে কি হবে ? বিয়োগফলের চেহারাটা তখন কেমন দাঁড়াবে ?

সংখ্যার সাজ ঃ

৯৯৯৯৯৯×২=১৯৯৯৯৯৮

৯৯৯৯৯৯×৩=২৯৯৯৯৯৭

৯৯৯৯৯৯×৪=৩৯৯৯৯৯৬

৯৯৯৯৯৯×৫=৪৯৯৯৯৯৫

৯৯৯৯৯৯×৬=৫৯৯৯৯৯৪

৯৯৯৯৯৯×৭=৬৯৯৯৯৯৩

৯৯৯৯৯৯×৮=৭৯৯৯৯৯২

৯৯৯৯৯৯×৯=৮৯৯৯৯৯১

দেখো দেখি ঃ প্রত্যেকটা ফলের বাঁ দিকে আছে ৬টা করে ৯। আর ডান দিকে প্রান্ত দুটো অঙ্কের মাঝে ৯ আছে ৫টা। এখন যদি ডান দিকে প্রান্ত দুটো সংখ্যার মাঝে ৯-এর সংখ্যা ৭ করতে চাই, তাহলে বাঁদিকে কটা ৯ বসাতে হবে?

কৌশলে সংখ্যার বর্গ ঃ

৩১ × ৩১ = ৯৬১ = ৯০০ + ৩০ + ৩১
৩২ × ৩২ = ১০২৪ = ৯৬১ + ৩১ + ৩২
৩৩ × ৩৩ = ১০৮৯ = ১০২৪ + ৩২ + ৩৩
৩৪ × ৩৪ = ১১৫৬ = ১০৮৯ + ৩৩ + ৩৪
৩৫ × ৩৫ = ১২২৫ = ১১৫৬ + ৩৪ + ৩৫

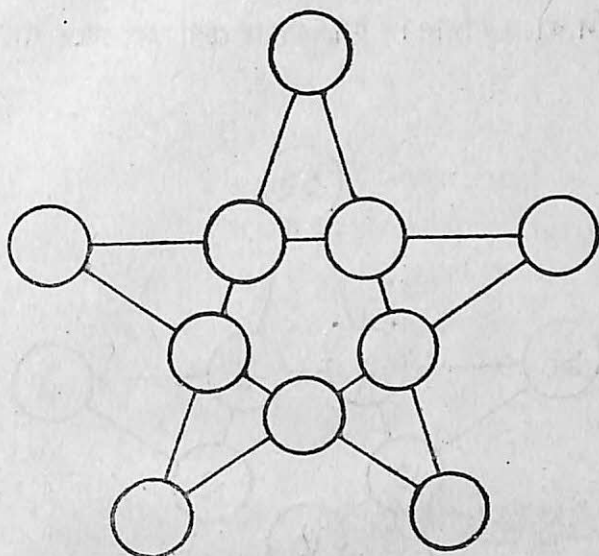
সংখ্যার এই বিন্যাস দেখে, যে কোনো সংখ্যার বর্গ জেনে, তার ঠিক পরের সংখ্যার বর্গ অতি সহজেই বলা সম্ভব কাগজ কলম হাতে না নিয়েই।

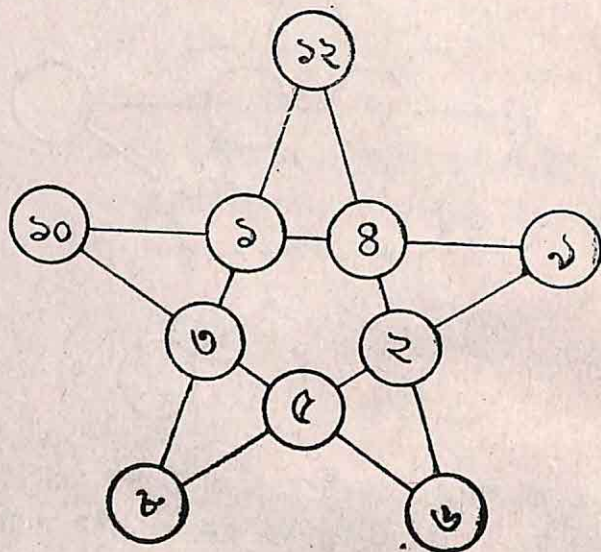
৫০ × ৫০ = ২৫০০

তাহলে ৫১ × ৫১ = ২৫০০ + ৫০ + ৫১
= ২৬০১

দেখো দেখি ঃ তিন অঙ্কের যে কোন সংখ্যার বর্গ তার আগের সংখ্যার বর্গ থেকে যদি একই ভাবে, বের করবার চেষ্টা করো, তাহলে কি হয়?

আচ্ছা, যে কোন একটা সংখ্যা দেওয়া থাকলে তার আগের সংখ্যার বর্গও কি একই কৌশলে বুদ্ধি খাটিয়ে বের করা যায়?

যোগফল ২৪ ঃ

পাঁচটা বাহু আছে রেখাঙ্কনটিতে। প্রতিটি বাহুর উপরেই আছে চারটা করে বৃত্ত। তোমারই ইচ্ছে মত এমন এক একটা সংখ্যা বসাও সেখানে যাতে প্রতিটি বাহুর উপরে বসানো সংখ্যার যোগফল দাঁড়ায় ২৪।

দেখো দেখি : ভেতরের পাঁচটা বৃত্তে ১, ২, ৩, ৪, ৫—এই সংখ্যাগুলি কাজে লাগাও। হ্যাঁ, এইবার চেষ্টা করা যেতে পারে।

কী, এইবার হচ্ছে ?

আটের মেলা ঃ

$$৯ \times ৯ + ৭ = ৮৮$$

$$৯৮ \times ৯ + ৬ = ৮৮৮$$

$$৯৮৭ \times ৯ + ৫ = ৮৮৮৮$$

$$৯৮৭৬ \times ৯ + ৪ = ৮৮৮৮৮$$

$$৯৮৭৬৫ \times ৯ + ৩ = ৮৮৮৮৮৮$$

$$৯৮৭৬৫৪ \times ৯ + ২ = ৮৮৮৮৮৮৮$$

$$৯৮৭৬৫৪৩ \times ৯ + ১ = ৮৮৮৮৮৮৮৮$$

$$৯৮৭৬৫৪৩২ \times ৯ + ০ = ৮৮৮৮৮৮৮৮৮$$

দেখো দেখি ঃ এই ভাবে বাঁ দিকের পরের সংখ্যাটা কি হবে বলতে পারো ? নিশ্চয়ই হওয়া উচিত,

$$৯৮৭৬৫৪৩২১ \times ৯ + (-১)$$

অর্থাৎ $৯৮৭৬৫৪৩২১ \times ৯ - ১$। কি, তাই না ? এর ফলও কি সবগুলো ৮ ? এর পরের সংখ্যায় ?

উল্টে যাওয়া ঃ

২×৯=১৮

৩×৯=২৭

৪×৯=৩৬

৫×৯=৪৫

৬×৯=৫৪

৭×৯=৬৩

৮×৯=৭২

৯×৯=৮১

দেখো দেখি ঃ সমান দূরের সংখ্যাগুলি এখানে আছে উল্টোভাবে। ১৮ আর ৮১, ২৭ আর ৭২…। ২×৯-এর আগের গুণটি কি হবে? ৯×৯-এর পরেরটি?

এই দুটো ফলও কি আছে উল্টোভাবে?

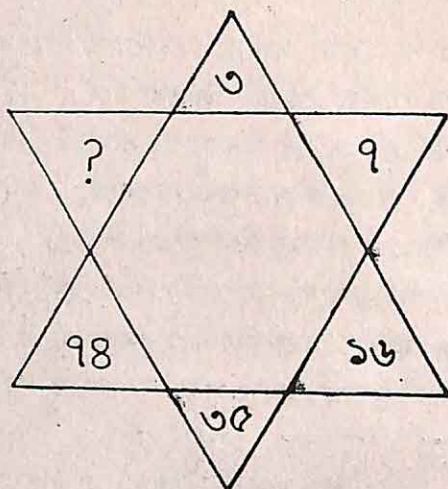
যেখানে শুরু সেখানেই শেষ ঃ

তিন অঙ্কের যে কোন সংখ্যা ১০০ থেকে শুরু করে ৯৯৯-এর মধ্যে, ইচ্ছে মত তাকে একবার লিখতে হবে। না, নতুন কিছু হেরফেরের দরকার নেই। শুধু তিন অঙ্কের সংখ্যাটি যেখানে লিখলে, তার পাশেই সেই সংখ্যাটিকে আর একবার লেখো। অর্থাৎ ছয় অঙ্কের একটি সংখ্যায় দাঁড়ালো প্রথমের তিন অঙ্কের সংখ্যাটি।

এখন এই সংখ্যাটির অনেক রকমের বৈশিষ্ট্য দেখা যায়। ৭ দিয়ে সংখ্যাটিকে ভাগ করো, নির্ভাবনায় করো, সংখ্যাটি একেবারে মিলে যাবে, ভাগশেষ কিছু নেই, অর্থাৎ শূন্য। এখন ভাগফল যা দাঁড়াল তাকে আবার ১১ দিয়ে ভাগ করো। হ্যাঁ, ১১ দিয়ে। এবারেও ভাগশেষ শূন্য। আর ভাগফল? ভাগফল যা দাঁড়াল এখন তাকে আবার ১৩ দিয়ে ভাগ করতে হবে। অবাক হওয়ার কথা, ভাগশেষ এবারেও শূন্য। আর ভাগফল, তা অবাকের উপরে অবাক করবে। প্রথমে তিন অঙ্কের যে সংখ্যা কল্পনা করেছিলে, ভাগফল এবারে তাতে এসে দাঁড়াবে।

৩ অঙ্কের কল্পনা করা সংখ্যা যদি ৯০৭ হয়, তাহলে ৬ অঙ্কের নির্দিষ্ট সংখ্যা ৯০৭৯০৭। উপরের নিয়মে সংখ্যাটিকে ৭, ১১, ১৩ দিয়ে ভাগ করো, দেখো, ভাগশেষ প্রতিবারেই শূন্য, আর শেষ ভাগফল যা দাঁড়াবে, তা ঐ প্রথম ৩ অঙ্কের সংখ্যা ৯০৭-ই।

দেখো দেখি ঃ ৩ অঙ্কের বদলে যদি ৪ অঙ্কের একটা সংখ্যা নিই। আর এই সংখ্যাটি যদি আর একবার এর পাশে লিখে একটা ৮ অঙ্কের সংখ্যা তৈরি করি, তাহলে? ৭, ১১, ১৩ দিয়ে একের পর এক ভাগ করলে, তা কি মিলবে? মনে রেখো, একটা ৩ অঙ্কের সংখ্যাকে আর একবার সেই একই সংখ্যার পাশে লেখা মানে, প্রথম সংখ্যাটাকে ১০০১ দিয়ে গুণ করা। আর ১০০১=৭×১১×১৩।

কোন্ সংখ্যা ঃ

কোন্ সংখ্যা বসবে জিজ্ঞাসা চিহ্ন দেওয়া ঘরে ? ঘড়ির কাঁটা যেদিক দিয়ে ঘোরে যদি সেদিক থেকে সংখ্যাগুলিকে লক্ষ্য করো তো দেখবে

৭= ৩×২+১

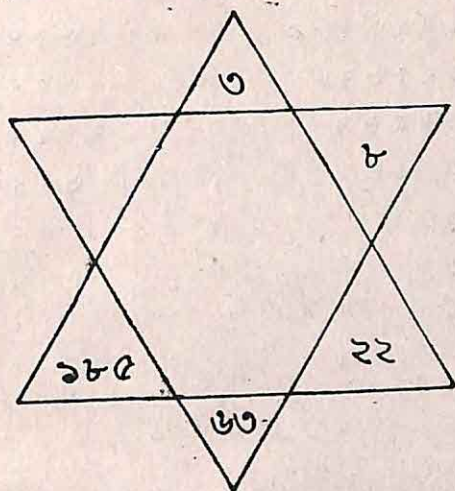
১৬= ৭×২+২

৩৫=১৬×২+৩

৭৪=৩৫×২+৪

তাহলে পরের সংখ্যা

১৫৩=৭৪×২+৫

দেখো দেখি : বলতে পারো, ফাঁকা ঘরে কত বসবে ?

নির্দিষ্ট যোগফল :

যে কোন একটি তিন অঙ্কের সংখ্যা চিন্তা করো। উল্টে দাও সংখ্যাটাকে। এবারে বড় সংখ্যা থেকে তিন অঙ্কেরই ছোট সংখ্যাটাকে বাদ দিতে হবে। বিয়োগফল কত হোলো ? যাই হোক, বিয়োগফলের সঙ্গে আবার এই বিয়োগফলের সংখ্যাটাকে উল্টে দিয়ে যোগ করো। যোগফল বরাবর ১০৮৯।

নির্দিষ্ট যোগফল ? ভাবছো, এ কেমন করে হবে ? কিন্তু অবাক হওয়ার কিছু নেই। তিন অঙ্কের যে কোন একটি সংখ্যা নিলেই আমার কথা বুঝতে পারবে।

ধরে নাও, সংখ্যাটি ১২৩। উল্টে ফেলে ৩২১। ৩২১, ১২৩-এর চেয়ে বড়। ফলে, বড় থেকে ছোট বিয়োগ করে ফল পাবে ১৯৮। তাকে আবার উল্টে দেখো, এবারে ৮৯১। এখন আর বিয়োগ নয় ১৯৮ আর ৮৯১ এ যোগ করো। যোগফল দাঁড়াবে আগের কথা মত ১০৮৯।

দেখো দেখি : তিন অঙ্কের বদলে যদি তুমি ৪ অঙ্কের সংখ্যা নাও, তাহলে কি হবে ? শুধু খেয়াল রেখো, বিয়োগফল যেন ৪ অঙ্কের সংখ্যাই আসে।

দেখে বল, কোন্ যোগফলটা বড় ?

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯	৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১
১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮	৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১
১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭	৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১
১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬	৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১
১ ২ ৩ ৪ ৫	৫ ৪ ৩ ২ ১
১ ২ ৩ ৪	৪ ৩ ২ ১
১ ২ ৩	৩ ২ ১
১ ২	২ ১
১	১

দেখো দেখিঃ পাঁচ সাত সেকেণ্ডে যদি না পারো তো, হিসেব করেই বলতে

তার আগে এই ছোটো ছুটো যোগের হিসেব করো ঃ

১ ২ ৩ ৪	৪ ৩ ২ ১
১ ২ ৩	৩ ২ ১
১ ২	২ ১
১	১

৯-এর গুণিতক :

৯৮৭৬৫৪৩২১× ৯= ৮৮৮৮৮৮৮৮৮৯

×১৮=১৭৭৭৭৭৭৭৭৭৮

×২৭=২৬৬৬৬৬৬৬৬৬৭

×৩৬=৩৫৫৫৫৫৫৫৫৫৬

×৪৫=৪৪৪৪৪৪৪৪৪৪৫

×৫৪=৫৩৩৩৩৩৩৩৩৩৪

×৬৩=৬২২২২২২২২২৩

×৭২=৭১১১১১১১১১২

×৮১=৮০০০০০০০০০১

দেখো দেখি : ৮১-এর পরে যদি ৯০ দিয়ে গুণ করি, তাহলে ফল কি দাঁড়ায় ? সে ফল কি, বাকি ফল ার মতনই ?

বিভাজক হবে বর্গ :

এমন একটা সংখ্যা বের করো যার বিভাজকগুলির যোগফল হবে একটা বর্গ সংখ্যা ?

নিশ্চয় অনেক সংখ্যাই হয়, তবে সবচেয়ে ছোট যে সংখ্যাটা হবে, সেটা হলো ২২। ২২-এর বিভাজক কি কি? ১, ২, ১১, ২২ যোগফল ৩৬ অর্থাৎ ৬-এর বর্গ।

দেখো দেখি : আরও এরকম একটা সংখ্যা বের করো, যার বিভাজক বর্গ।

মজার গুণ :

৪৮৩ কে ১২ দিয়ে গুণ কর।

```
  ৪ ৮ ৩
  × ১ ২
 -------
৫ ৭ ৯ ৬
```

এই গুণের বৈশিষ্ট্য কি ? ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সব কটা অঙ্কই আছে আর তা আছে একবার করে।

দেখো দেখি : এরকম আর একটা গুণ তৈরি করতে পারো কি ? আর একটু বলে দিই, সেখানেও ফল হবে একই। তাহলে ? গুণটি হল,

```
  ১ ৩ ৮
  × ৪ ২
 -------
৫ ৭ ৯ ৬
```

ভিন্ন ফল, কিন্তু ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সব কটা অঙ্কই আসে, এ রকম আর একটা গুণ

```
  ২ ৯ ৭
  × ১ ৮
 -------
৫ ৩ ৪ ৬
```

দেখো দেখি : এই ফলেরই আরও গুণ আছে, যাতে সব কটা সংখ্যাই আসে একবার করে, এটা কিন্তু করতে হবে নিজেকেই।

হারানো সংখ্যা ছুটি কত ?

দেখো দেখি ঃ ২, ৩, ৪, ৫, ৬ এর বর্গ কর।

উপরের সংখ্যা পাওয়ার জন্যে ১, ২, ৩, ৪, ৫ বিয়োগ কর। নীচের সংখ্যা ? পার কিনা নিজে চেষ্টা করে দেখো।

এ কি মৌলিক ঃ

মৌলিক সংখ্যা কাকে বলে জানো নিশ্চয়। যে সংখ্যাকে সেই সংখ্যা আর ১ দিয়ে ভাগ করলে মিলবে। আর অন্য কোনো সংখ্যাই নয়। ১৭ একটা মৌলিক সংখ্যা। ১৭-কে ১ দিয়ে ভাগ করলে মিলবে আর ১৭ দিয়ে ভাগ করলেও। কিন্তু অন্য কোনো সংখ্যা দিয়ে তাকে ভাগ করা যায় না। তাহলে ১৭ একটা মৌলিক সংখ্যা। কিন্তু ১৮ নয়। ১৮-কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে মেলে। ৯ আর ৬ দিয়েও। ৩, ৬, ৯ — ১৮ এর উৎপাদক।

মৌলিক সংখ্যা কাকে বলে জেনে এখন তোমাকে বলতে হবে ১ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০১—সংখ্যাটি মৌলিক কি না। তার মানে তুমি যদি এত বড় সংখ্যার কোনো উৎপাদক বের করতে পারো, তাহলেই তা বলা সম্ভব। তাহলে এত বড় একটা সংখ্যার উৎপাদকের খোঁজ করো। যদি একটাও উৎপাদক বের করতে পারো, তাহলেই যথেষ্ট। বলে দিতে পারো, সংখ্যাটা মৌলিক নয়। আর যদি কোনো উৎপাদক না থাকে, তাহলে সংখ্যাটা মৌলিক।

কিন্তু এত বড় একটা সংখ্যা! এর উৎপাদক বের করা কি সম্ভব?

হ্যাঁ, এ জাতীয় সংখ্যার একটা বৈশিষ্ট্য আছে। দু ধারে আছে ১ আর ১। মাঝে শূন্য। শূন্যের সংখ্যা গুনে নাও। এখানে শূন্য আছে বারোটা। শূন্যের সংখ্যা জোড় হলে এ ধরনের যত বড় সংখ্যাই হোক না কেন, তা কখনোই মৌলিক হবে না। ১১ দিয়ে ভাগ করলে তা মিলবেই। কিন্তু মাঝে শূন্যের সংখ্যা বিজোড় হলে নয়। তাহলে দু ধারে ১, ১ আর মাঝে যদি একশোটা শূন্য থাকে, তাহলে? তখনো অত বড় সংখ্যা আর মৌলিক থাকবে না।

দেখো দেখি: ২০০০০২—এই সংখ্যাটির কি ১১ একটা উৎপাদক সংখ্যাটির দুধারে ১-এর বদলে ২ আর মাঝে চারটে অর্থাৎ জোড় সংখ্যার শূন্য। ২-এর বদলে ৩, ৪, ৫ যে কোনো অঙ্ক নাও আর মাঝে শূন্যের সংখ্যা বাড়াও, কিন্তু জোড় সংখ্যক রাখো।

৩৪০০০০৩৪—এই সংখ্যাটির কি একটা উৎপাদক ১১?

দ্বিগুণ ঃ

৪ ২ ১ ০ ৫ ২ ৬ ৩ ১ ৫ ৭ ৮ ৯ ৪ ৭ ৩ ৬ ৮

সংখ্যাটার কি বৈশিষ্ট্য বল দেখি ?

এককের ঘরে আছে ৮। এই ৮-কে এককের ঘর থেকে তুলে এনে একেবারে সামনে বসাও। তাহলে সংখ্যাটা দাঁড়াচ্ছে

৮ ৪ ২ ১ ০ ৫ ২ ৬ ৩ ১ ৫ ৭ ৮ ৯ ৪ ৭ ৩ ৬।

এই সংখ্যাটা উপরের সংখ্যার দ্বিগুণ।

দেখো দেখি ঃ দুই অঙ্কের এরকম একটাও সংখ্যা কি পাওয়া যাবে ?

মুছে যাওয়া সংখ্যা ঃ

ভাগটার অধিকাংশ সংখ্যাই দেখি মুছে গেছে। মুছে যাওয়া সংখ্যাগুলোর জায়গায় তারকাচিহ্ন বসানো হয়েছে। কিন্তু ভাজকের ঘরে এ কি অবস্থা ! সেখানে যে কিছুই নেই ! পুরো ভাগের চেহারাটা কি এই আধ-মোছা, না, আধ-মোছা কোথায়, প্রায় পুরো মোছা অবস্থা থেকে উদ্ধার করা সম্ভব ?

দেখো দেখিঃ আগে ভাজকে কটা অঙ্ক আছে, সেটা হিসেব করে নাও। ভাজকে যে অঙ্ক দুটো মাত্র সেটা ভাগের তৃতীয় লাইন দেখলেই বোঝা যাবে। আরও একটু বলি। ভাগফলে ৮-এর আগে কত হবে নিশ্চয় বুঝতে পারছো। ৮-এর আগে বসবে শূন্য। কি, তাই না ? আর ৮-এর পরে ? সেখানেও তো শূন্য হবে। বাকিটুকু খুব কঠিন হবে কি ?

```
      ৯ ০ ৮ ০ ৯
   ____________
১২ ) ১ ০ ৮ ৯ ৭ ০ ৮
     ১ ০ ৮
     _____
         ৯ ৭
         ৯ ৬
         _____
           ১ ০ ৮
           ১ ০ ৮
           _____
               ০
```

কত বসবে ঃ

৮ ৫ ২
৪ ২ ০
৯ ৬ ?

জিজ্ঞাসা চিহ্ন তুলে দিয়ে কত বসাবো ? লক্ষ্য করো, প্রথম সারিতে সংখ্যাগুলি কমে যাচ্ছে ৩ হিসেবে, দ্বিতীয় সারিতে ২ হিসেবে আবার তৃতীয় সারিতে ৩ হিসেবে। তাহলে জিজ্ঞাসা চিহ্ন তুলে দিয়ে বসাতে হবে নিশ্চয় ৩।

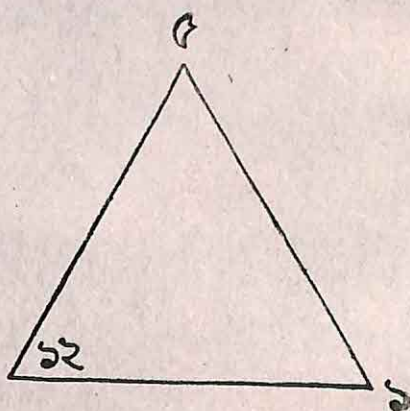
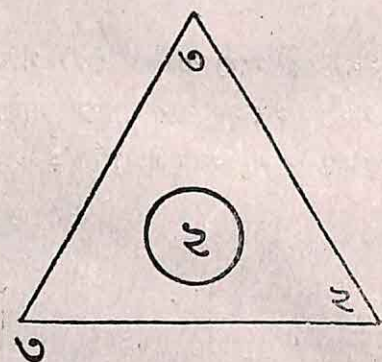
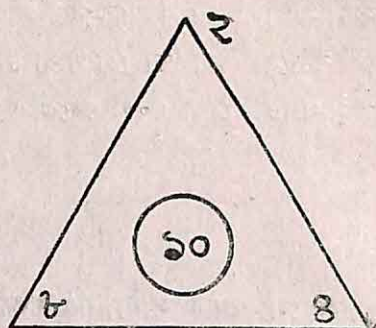
দেখো দেখিঃ এখন বলতে পারো, এই সংখ্যাচিত্রে কত বসাবো জিজ্ঞাসা চিহ্ন তুলে দিয়ে ?

৪ ৮ ৬
৬ ২ ৪
৮ ৬ ?

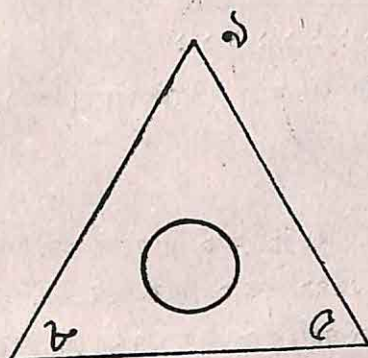
যত বেশি তত কম ঃ

তিন অঙ্কের একটা সংখ্যা। এটার এককের অঙ্ক ৪। যদি ৪কে সামনে ঘুরিয়ে এনে বসানো হয়, তাহলে সংখ্যাটা ৪০০ থেকে যত বেশি হয়, প্রথম সংখ্যাটা ঠিক ৪০০ থেকে তত কমই ছিল। সংখ্যাটা কত ?

দেখো দেখি ঃ তাহলে প্রথম সংখ্যাটার শতকের অঙ্ক নিশ্চয়ই ৩ এবং শেষ অঙ্ক ৪। একটু বুদ্ধি খাটাও, দেখতে পাবে সংখ্যাটা হচ্ছে ৩৬৪।

১০০ থেকে ২০০-এর মধ্যে এরকম একটা সংখ্যা বের কর, যার এককের অঙ্কে আছে ২। ২-কে ঘুরিয়ে সামনে আনলে, দেখা যাবে, সংখ্যাটা ২০০ থেকে যত বেশি, প্রথম সংখ্যাটা ২০০ থেকে ঠিক ততটা কম ছিল।

কত বসবে ঃ

কত বসবে তৃতীয় ত্রিভুজের ভেতরে ?

দেখো দেখি : যদি বলে দিই ৬, তাহলে কি পারবে নীচের ত্রিভুজের ভেতরের বৃত্তের সংখ্যা বের করতে ?

প্রত্যেকেই আসে :

```
  ৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১
  ১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯
  ─────────────────
  ৮ ৬ ৪ ১ ৯ ৭ ৫ ৩ ২
```

বিয়োগ করলে সবাই আসে— বাদ কেউই নেই।

দেখো দেখি : ৯ ৮ ৭ ৬ থেকে ৬ ৭ ৮ ৯ আর ৪ ৩ ২ ১ থেকে ১ ২ ৩ ৪ বিয়োগ কর। দুটো ফলই কি একই আসছে ?

৮ বাদ ঃ

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৯ কে ৯ দিয়ে গুণ।

```
  ১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৯
                ৯
 ─────────────────
১ ১ ১ ১ ১ ১ ১ ১ ১
```

১ থেকে ৯ পর্যন্ত সব কটা সংখ্যাই আছে, শুধু ৮ নেই।

দেখো দেখি ঃ ৬৭৯ কে ৯ দিয়ে গুণ কর, তার ফল ৬১১১।

৫৬৭৯ কে ৯ দিয়ে গুণ কর, তার ফল ৫১১১১

৪৫৬৭৯ কে ৯ দিয়ে গুণ করলে, তার ফল ৪১১১১১

তাহলে

২৩৪৫৬৭৯ কে ৯ দিয়ে গুণের ফল লেখো, গুণ না করেই

সত্যেন বোসের অঙ্ক ঃ

এনট্রান্স পরীক্ষায় সত্যেন বোস অঙ্কে একশোর মধ্যে একশো পাননি। কেন জানো ?

পরীক্ষার খাতা জমা দিয়ে সত্যেন বোস ফিরে এলেন হিন্দু স্কুল। অঙ্কের শিক্ষকমশায় ছিলেন বিজ্ঞান পাগল উপেন্দ্রলাল বক্সী। তিনি ছাত্রের আসার অপেক্ষায় বসে। প্রশ্নপত্র হাতে নিয়ে দুজনে মুখে মুখে অঙ্কগুলি কষে যেতে লাগলেন। হঠাৎ দেখা গেল, একটি অঙ্কে সত্যেন্দ্রনাথ ১১৭ কে আর ভাঙ্গেন নি, অবিভাজ্য মনে করে। বক্সী মশায় বললেন, ন তেরম্ ? দুজনের মুখই মুহূর্তে কালো হয়ে গেল।

তাহলে অঙ্কে উৎপাদক একটা মস্ত বড় কথা।

কিন্তু উৎপাদক হিসেবে ৯ কে বের করা কিছু কঠিন নয়। ১১৭ তো সামান্য ব্যাপার, যত বড় সংখ্যাই হোক না কেন, যদি তার অঙ্কগুলির যোগফল শেষ পর্যন্ত ৯-এ এসে দাঁড়ায়, তাহলে সংখ্যাটিকে ৯ দিয়ে ভাগ করলে মেলে।

একটা সংখ্যা ধরি,

৭ ৮ ৬ ৫ ৩ ০ ৪ ২ ১।

সংখ্যাটিতে সমস্ত অঙ্কের যোগফল ৩৬। ৩৬-এর ৩ আর ৬ যোগ করে আবার ৯। তাহলে সংখ্যাটিকে ৯ দিয়ে ভাগ করলে মেলে।

দেখো দেখি ঃ এখন ৩ কে উৎপাদক হিসেবে পেতে গেলে সংখ্যায় অঙ্কের যোগফল কত হবে ?

৭-এর গুণ :

```
      ৭ ৭ ৭ ৭ ৭
    × ৭ ৭ ৭ ৭ ৭
   -------------
          ৪ ৯
        ৪ ৯ ৪ ৯
      ৪ ৯ ৪ ৯ ৪ ৯
    ৪ ৯ ৪ ৯ ৪ ৯ ৪ ৯
      ৪ ৯ ৪ ৯ ৪ ৯
        ৪ ৯ ৪ ৯
          ৪ ৯
 ------------------
    ৬ ০ ৪ ৮ ১ ৭ ২ ৯
```

দেখো দেখি : ৬ টা ৭ কে ৬ টা ৭ দিয়ে গুণ করে এভাবে সাজাতে পারবে ?

৭-এর আর এক গুণ :

```
       ৭ ৭ ৭
       ৭ ৭ ৭
   -----------
           ৭
       ৭ ৭ ৭
   ৭ ৭ ৭ ৭ ৭
   -----------
   ৮ ৬ ২ ৪ ৭
         × ৭
   -----------
 ৬ ০ ৩ ৭ ২ ৯
```

দেখো দেখি : ৫ টা ৭ কে ৫ টা ৭ দিয়ে এভাবে গুণ করো দেখি ।

ফাঁকা ঘরের সংখ্যা কত ঃ

ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেদিকে ঘুরিয়ে যাও ৩ দিয়ে গুণ করে। তাহলে ফাঁকা ঘরে নিশ্চয় বসবে ৩।

দেখো দেখি ঃ বলতে পারো, কত বসবে ফাঁকা ঘরে ?

৪	২
৮	১৬

মনে মনে ঃ

নিজের পছন্দমত যে কোন একটি সংখ্যা ভাবো। তাঁকে ৩ দিয়ে গুণ করতে হবে। যা হল তার সঙ্গে ১ যোগ করো। আবার ৩ দিয়ে গুণ। এবার প্রথমে যে সংখ্যাটাকে ভেবেছিলে, সে সংখ্যাটাকেই যোগ করো। যোগফলে যে সংখ্যাটা এল দেখো তার এককের অঙ্ক ৩ কি না। কি, মিলেছে তো? সেটা কেটে দাও। বাকী যেটা পড়ে রইল, সেটাই তুমি প্রথমে ভেবেছিলে।

মনে করো, তুমি ভেবেছিলে ১৭। তাকে ৩ দিয়ে গুণ করে পেলে ৫১। ১ যোগ করো। সম্পূর্ণ সংখ্যাটি দাঁড়াল ৫২। আবার একে ৩ দিয়ে গুণ করতে হবে। ৩×৫২=১৫৬, আবার ১৭ যোগ করো এর সঙ্গে, ১৫৬+১৭=১৭৩। লক্ষ্য করো, ৩ আছে এককের অঙ্কে আর সেটি বাদ দিলে যা থাকে তা তোমার নিজের সংখ্যা ১৭।

দেখো দেখি ঃ যদি ৩, ৪, ৫, ৬ বা যে কোন অঙ্কের একটা সংখ্যা নিয়ে এইভাবে চেষ্টা করি, তাহলে? মনে রেখো, হিসেব নিকেশের শেষে প্রথম সংখ্যাটা হয়ে যাচ্ছে নিজেরই ১০ গুণ আর ৩, সবশুদ্ধ এরই যোগফল

সংখ্যার যোগ ঃ

১+২=৩

৪+৫+৬=৭+৮

৯+১০+১১+১২=১৩+১৪+১৫

১৬+১৭+১৮+১৯+২০=২১+২২+২৩+২৪

এইভাবে চললো।

দেখো দেখি ঃ আচ্ছা, ৬৪ দিয়ে কি কোনো সমতা শুরু হচ্ছে?

বর্গ এবং ঘনের যোগও ঃ

১+৬+৭+১৭+১৮+২৩=২+৩+১১+১৩+২১+২২

বর্গের যোগ ঃ

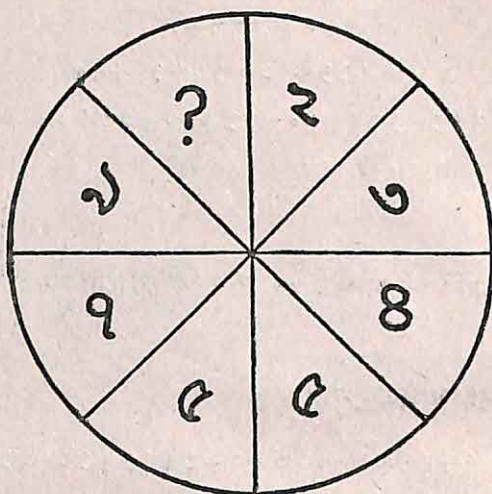
১ এর বর্গ+৬ এর বর্গ+৭ এর বর্গ+১৭ এর বর্গ+১৮ এর বর্গ+২৩ এর বর্গ=২ এর বর্গ+৩ এর বর্গ+১১এর বর্গ+১৩ এর বর্গ+২১ এর বর্গ+২২ এর বর্গ।

ঘনের যোগ ঃ

১ এর ঘন+৬ এর ঘন+৭ এর ঘন+১৭এর ঘন+১৮ এর ঘন+২৩ এর ঘন=২ এর ঘন+৩ এর ঘন+১১ এর ঘন+১৩ এর ঘন+২১ এর ঘন+২২ এর ঘন।

এইভাবে চতুর্থ বর্গ এবং পঞ্চবর্গেরও যোগ।

দেখো দেখি ঃ ১+৪+১২+১৩+২০=২+৩+১০+১৬+১৯। এদের বর্গের যোগ এবং ঘনের যোগও কি সমান?

কত বসবে ঃ

জিজ্ঞাসা চিহ্ন যেখানে আছে কত বসবে সেখানে ? প্রতি সংখ্যার দ্বিগুণের সঙ্গে ১ যোগ করলেই উল্টোদিকের সংখ্যা মিলবে।

দেখো দেখি ঃ যদি কোথাও থাকতো ১৩, তাহলে উল্টোদিকে কত বসতো ?

তিন অঙ্কের সংখ্যা ঃ

তিন অঙ্কের এমন একটা সংখ্যা বের করো, যার থেকে ৭ বিয়োগ করলে বিয়োগফল ৭ দিয়ে ভাগ করলে মিলবে। যদি ৮ বিয়োগ করো, তাহলে ৮ দিয়ে ভাগ করলেও মিলবে ; ৯ বিয়োগ করলে ৯ দিয়ে ভাগ করলেও মিলবে।

সংখ্যাটা কি ?

তিনটে সংখ্যার লসাগু বের করলে কি হয় ? এদের লসাগু ৫০৪। হ্যাঁ, ৫০৪ই উত্তর, কারণ ৫০৪ এর আর কোনো গুণিতকই ৩ অঙ্কের নয়।

দেখো দেখি ঃ যদি বলি দু অঙ্কের একটা সংখ্যা করো যার থেকে ৭ বিয়োগ করলে বিয়োগফল ৭ দিয়ে ভাগ করলে মেলে, আর ১১ বিয়োগ করলে ১১ দিয়েও।

যোগ ২৩ ঃ

১ থেকে ৯ পর্যন্ত সব কটা সংখ্যাই আছে এই ক্রশের মধ্যে। কিন্তু কোন সংখ্যাই দুবার নয়। যে কোনোদিকে যোগফল ২৩।

৫
৯
৩ ৭ ১ ৮ ৪
৬
২

দেখো দেখি ঃ দু দিক থেকে একই যোগফল হবে এ রকম একটা ক্রশ তৈরি করতে পারবে, ১ থেকে ৯ পর্যন্ত একবার করে নিয়ে ? মনে রেখো, বেশিরভাগ সময়েই একাধিক সমাধান সম্ভব

১-এর সাজ ঃ

১ × ১ = ১

১১ × ১১ = ১২১

১১১ × ১১১ = ১২৩২১

১১১১ × ১১১১ = ১২৩৪৩২১

১১১১১ × ১১১১১ = ১২৩৪৫৪৩২১

দেখো দেখি ঃ এগিয়ে চলো ক্রমশ। বল তো,

১১১১১১১১১ × ১১১১১১১১১ এর ফল কত ?

গুণের ফল উল্টো ঃ

১০৮৯ × ৯ = ৯৮০১

১০৯৮৯ × ৯ = ৯৮৯০১

১০৯৯৮৯ × ৯ = ৯৮৯৯০১

১০৯৯৯৮৯ × ৯ = ৯৮৯৯৯০১

দেখো দেখি ঃ পরের দুটো লাইন কি হবে বলতে পারো ?

বিজোড় সংখ্যা ঃ

						আনুভূমিক যোগফল
১						১
৩	৫					৮
৭	৯	১১				২৭
১৩	১৫	১৭	১৯			৬৪
২১	২৩	২৫	২৭	২৯		১২৫
৩১	৩৩	৩৫	৩৭	৩৯	৪১	২১৬

যোগফলের সব সংখ্যাই ঘনফল। ১ ১-এর ঘনফল, ৮ ২-এর, ২৭ ৩-এর, ৬৪ ৪-এর, ১২৫ ৫-এর, ২১৬ ৬-এর।

দেখো দেখি ঃ ১২ সংখ্যক সারিতে যোগফল কত আসবে ?

ভাগশেষ ঃ

২৫১৯ ÷ ১০ = ৯
÷ ৯ = ৮
÷ ৮ = ৭
÷ ৭ = ৬
÷ ৬ = ৫
÷ ৫ = ৪
÷ ৪ = ৩
÷ ৩ = ২
÷ ২ = ১
÷ ১ = ০

এরা আসছে ভাগশেষ হিসেবে।

দেখো দেখি ঃ যদি ২৫১৯ এর দ্বিগুণ অর্থাৎ ৫০৩৮ কে ১০, ৯, ৮, ৭, ৬, ৫, ৪, ৩, ২, ১ দিয়ে ভাগ করে চলো, তাহলে ভাগশেষ কি কি হবে ?

সংখ্যার জোড় :

১২ × ৪২ = ২১ × ২৪

১২ × ৮৪ = ২১ × ৪৮

১৩ × ৬২ = ৩১ × ২৬

২৩ × ৯৬ = ৩২ × ৬৯

২৪ × ৬৩ = ৪২ × ৩৬

এমন সংখ্যার জোড় পাওয়া যায়, যাদের এককের স্থানের অঙ্ককে দশকের স্থানে নিয়ে এসে গুণ করলেও ফল একই থাকে।

১২ আর ৪২ ধরা যাক। স্থান বদল করলে ১২ হবে ২১ আর ৪২ হবে ২৪। গুণের ফল কিন্তু একই।

দেখো দেখি : এ রকম আরও একটা সংখ্যার জোড় খুঁজে বের করতে পারো ?

একটি সমতা :

২, ৩, ৭, ১, ৫ এবং ৬ দিয়ে একটি সুন্দর সমতা তৈরি করা চলে।

২ + ৩ + ৭ = ১ + ৫ + ৬

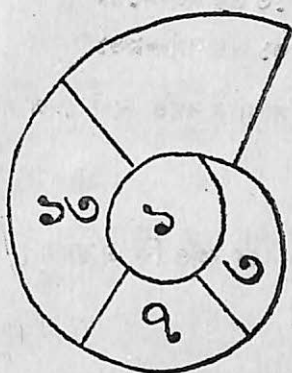
এবং ২ এর বর্গ + ৩ এর বর্গ + ৭ এর বর্গ

= ১ এর বর্গ + ৫ এর বর্গ + ৬ এর বর্গ

কি ঠিক তো ?

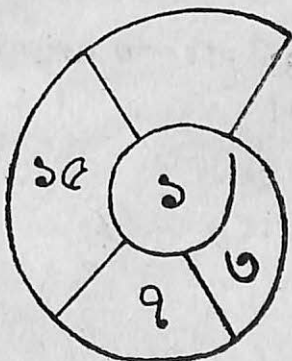
দুশো বছরেরও আগের কথা, সংখ্যা নিয়ে অনেক রকমের সমতা তৈরি করেছিলেন গোল্ডবাক এবং অয়লার।

দেখো দেখি : সংখ্যা আর সংখ্যার বর্গ নিয়ে আর কোনো সমতা কি তৈরি করতে পারো ?

কত রাখবো ঃ

কত বসাবো ফাঁকা ঘরে ?

লক্ষ্য করো, পর পর সংখ্যাগুলি ১, ৩, ৭, ১৩। একটির সঙ্গে পরেরটির পার্থক্য ২, ৪, ৬। তাহলে পরের পার্থক্য হবে ৮। ফাঁকা ঘরের সংখ্যা নিশ্চয় ২১।

× ×

দেখো দেখি ঃ ফাঁকা ঘরের সংখ্যা কত হবে, বলতে পারো ?

বর্গও উল্টালো :

১৩ এর বর্গ=১৬৯

৩১ এর বর্গ=৯৬১

সংখ্যা উল্টালো, সংখ্যার বর্গও উল্টে গেল সঙ্গে সঙ্গে।

দেখো দেখি : ১৫-এর বর্গও কি এ রকম ? না, তা নয়। কেন নয় ? বলতে পারো ?

কয়েকটি প্যাটার্ন :

৯×১+১=১০	৯×০+১= ১	৯×০ +১= ১
৯×২+২=২০	৯×১+২=১১	৯×১ +২= ১১
৯×৩+৩=৩০	৯×২+৩=২১	৯×১২ +৩= ১১১
৯×৪+৪=৪০	৯×৩+৪=৩১	৯×১২৩+৪=১১১১

দেখো দেখি : ১০টি সারি পর্যন্ত এগোলে প্রত্যেকটি প্যাটার্নের ফল কি রকম দাঁড়াবে ?

বিচিত্র সংখ্যা ঃ

এ এমন ধরনের সংখ্যা যে সংখ্যার বর্গ করলে শেষে সেই সংখ্যাই আসবে।

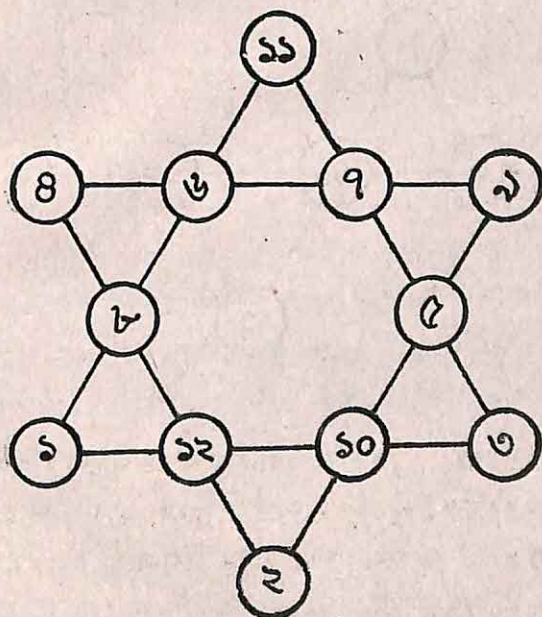
৫ এর বর্গ= ২৫

৭৬ এর বর্গ= ৫৭৭৬

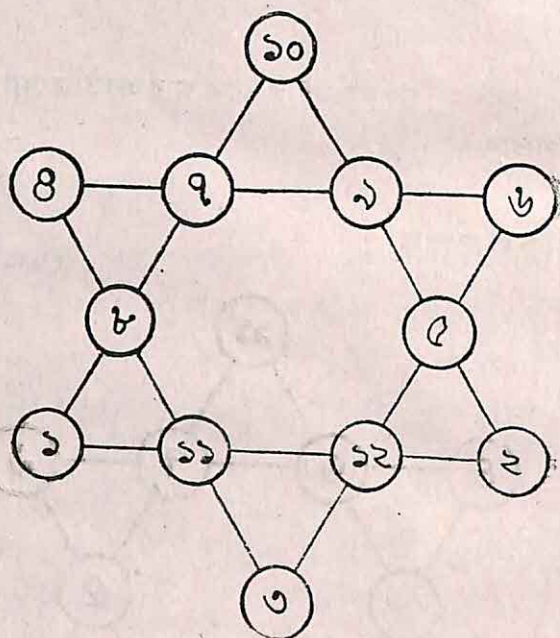
৬২৫ এর বর্গ=৩৯০৬২৫

এই জাতীয় সংখ্যাকে বলা হয় automorphic (অটোমরফিক) সংখ্যা।

দেখো দেখি ঃ খুব সহজেই এ রকম আর একটা সংখ্যা বের করা যায়। পারবে ?

ম্যাজিক তারকা ঃ

এটা একটা ম্যাজিক তারকা। যে কোনো সারিতে সংখ্যার যোগফল সমান এবং তা হলো ২৬। কিন্তু কৌণিক বিন্দুগুলিতে সংখ্যার যোগফল ৩০।

এই সংখ্যাগুলিকে এমনভাবে সাজাতে হবে যাতে সব সারিতে সংখ্যার যোগফল ২৬, সেই সঙ্গে কৌণিক সংখ্যাগুলির যোগফলও হবে ওই ২৬।

হ্যাঁ, সংখ্যাগুলিকে ওই রকমভাবে রাখাও সম্ভব।

দেখো দেখি ঃ কিভাবে করা হল বলতে পারো ? একটু এগিয়ে দিই। কৌণিক বিন্দুতেও সংখ্যার যোগফল ২৬। আর সব সংখ্যার যোগফল ৭৮। তাহলে ভেতরের ষড়্‌ভুজে সংখ্যার সমষ্টি ৫২।

এইবারে নিজে এগিয়ে যাওয়ার চেষ্টা করো।

যে সংখ্যা ভেবেছিলে ঃ

যে কোনো. একটা সংখ্যা মনে করো। তাকে ৫ দিয়ে গুণ করে ৬ যোগ কর। আবার গুণ করো ৪ দিয়ে। যোগ কর ৯। যা হলো তাকে গুণ করো ৫ দিয়ে। বাদ দাও ১৬৫।

এখন শেষে দুটো শূন্য আছে, কি তাই না? এই শূন্য দুটো বাদ দিলেই তোমার সংখ্যা।

দেখো দেখি ঃ যদি সংখ্যাটাকে ৪ দিয়ে গুণ করে ৯ যোগ করতাম, তারপর ২৫ দিয়ে গুণ করতাম, বাদ দিতাম ২২৫, তাহলেও কি সংখ্যাটা পেতাম শেষে দুটো শূন্য বাদ দিয়ে?

এক সংখ্যাই আসে ঃ

০৭৬৯২৩ × ১ = ০৭৬৯২৩
× ১০ = ৭৬৯২৩০
× ৯ = ৬৯২৩০৭
× ১২ = ৯২৩০৭৬
× ৩ = ২৩০৭৬৯
× ৪ = ৩০৭৬৯২

লক্ষ্য কর, সমতা চিহ্নের ডাইনে প্রথম স্তম্ভের সংখ্যা সেই ০ ৭ ৬ ৯ ২ ৩। আর যে কোনো সারির সংখ্যা ক্রম সেই একই স্তম্ভের সংখ্যাক্রমের সমান। যেমন, তৃতীয় স্তম্ভে আছে ৬ ৯ ২ ৩ ০ ৭। তৃতীয় সারিতেও তাই।

দেখো দেখি ঃ ৭৬৯২৩ কে একে একে ২, ৭, ৫, ১১, ৬, ৮ দিয়ে গুণ করো আগের মত আর সারি আর স্তম্ভগুলি খেয়াল করো।

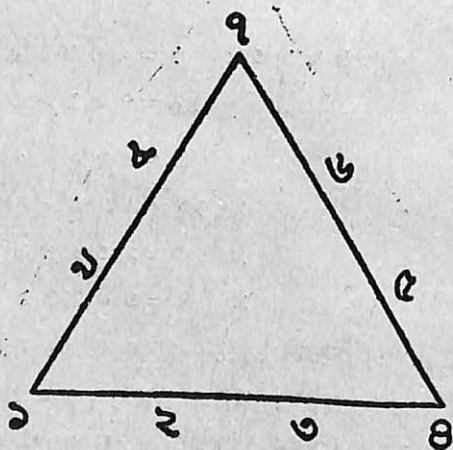
যোগফল ১০০ :

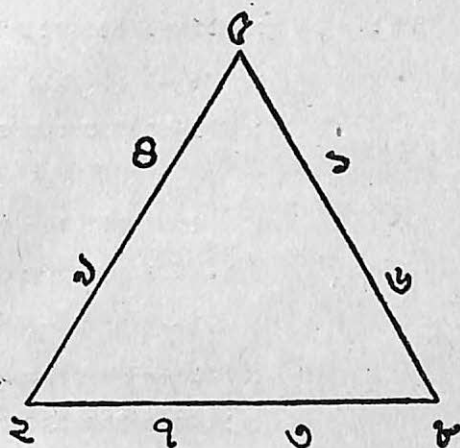
ক্রমিক সংখ্যার যোগফলের সাহায্যে ১০০০ কে ব্যক্ত করতে হবে। কিভাবে করব তা ? তিনভাবে করা যায়।

প্রথম ॥ ১৯৮, ১৯৯, ২০০, ২০১, ২০২

দ্বিতীয় ॥ ২৮, ২৯, ৩০,......৫০, ৫১, ৫২

দেখো দেখি : তৃতীয় কিভাবে করা যাবে ? যদি খুব অসুবিধা হয় তো এইটুকু বলি যে, সেখানে আছে ১৬টা সংখ্যা।

১ থেকে ৯ :

ত্রিভুজের গা ঘেঁষে আর তিন কোণে ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সংখ্যা বসানো আছে। সংখ্যাগুলিকে এমনভাবে সাজিয়ে বসাও যাতে ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর উপরে বসানো সংখ্যার বর্গের যোগফল সমান হয়।

হ্যাঁ, করা যায় যদি সংখ্যাগুলো রাখি নীচের মত করে।

দেখো দেখিঃ শুধু সংখ্যার বর্গের যোগফল নয়, সংখ্যার যোগফলও সমান কি না ?

একই সংখ্যা ঃ

৩৭ × ৩ = ১১১

৩৭ × ৬ = ২২২

৩৭ × ৯ = ৩৩৩

৩৭ × ১২ = ৪৪৪

৩৭ × ১৫ = ৫৫৫

৩৭ × ১৮ = ৬৬৬

৩৭ × ২১ = ৭৭৭

৩৭ × ২৪ = ৮৮৮

৩৭ × ২৭ = ৯৯৯

আবার

৬৫ ৩৫৯ ৪৭৭ ১২৪ ১৮৩ × ১৭ = ১ ১১১ ১১১ ১১১ ১১১ ১১১

× ৩৪ = ২ ২২২ ২২২ ২২২ ২২২ ২২২

× ৫১ = ৩ ৩৩৩ ৩৩৩ ৩৩৩ ৩৩৩ ৩৩৩

× ৬৮ = ৪ ৪৪৪ ৪৪৪ ৪৪৪ ৪৪৪ ৪৪৪

× ৮৫ = ৫ ৫৫৫ ৫৫৫ ৫৫৫ ৫৫৫ ৫৫৫

× ১০২ = ৬ ৬৬৬ ৬৬৬ ৬৬৬ ৬৬৬ ৬৬৬

× ১১৯ = ৭ ৭৭৭ ৭৭৭ ৭৭৭ ৭৭৭ ৭৭৭

× ১৩৬ = ৮ ৮৮৮ ৮৮৮ ৮৮৮ ৮৮৮ ৮৮৮

× ১৫৩ = ৯ ৯৯৯ ৯৯৯ ৯৯৯ ৯৯৯ ৯৯৯

দেখো দেখি : ৩৭ আর ৬৫ ৩৫৯ ৪৭৭ ১২৪ ১৮৩ সংখ্যা দুটি পেলাম কোথা থেকে ?

$$\frac{১}{২৭} = \dot{\cdot}০৩\dot{৭}$$

$$\frac{১}{১৫৩} = \dot{\cdot}০০৬৫ ৩৫৯ ৪৭৭ ১২৪ ১৮\dot{৩}$$

ঘুরিয়েও বর্গ ঃ

চার অঙ্কের একটা সংখ্যা, যদি সেই সংখ্যাটা হয় ১০৮৯, তাহলে দেখি

১০৮৯ = ৩৩এর বর্গ

আবার সংখ্যাটাকে ঘুরিয়ে যদি শেষ থেকে শুরু করি, তাহলে

৯৮০১ = ৯৯এর বর্গ

দেখো দেখি ঃ এ রকম আর কোনো সংখ্যা পেতে পার কি ?

তিন অঙ্কের বর্গও উল্টোয় ঃ

১৩ আর ৩১-এর বর্গ উল্টোয়, আগে দেখেছি। সে রকম ১২ আর ২১-এর বর্গও

১২-এর বর্গ = ১৪৪

২১-এর বর্গ = ৪৪১

দুই অঙ্কবিশিষ্ট এ জাতীয় আর কোনো সংখ্যাই নেই।

তিন অঙ্কবিশিষ্ট এ রকম কোনো জোড়া সংখ্যা আছে কি? হ্যাঁ, আছে। এক জোড়া বা দু জোড়া নয়, পাঁচ জোড়া। এই পাঁচ জোড়ার চার জোড়া হল ১০২, ১০৩, ১১২, ১১৩।

দেখো দেখি ঃ পঞ্চম জোড়াটি বের করতে পারো কি না।

মুছে যাওয়া গুণ ঃ

```
  * * *
    * *
---------
 * * * *
* * * *
---------
* * * * *
```

গুণ্য এবং গুণকের মুছে যাওয়া সব কটা অঙ্কই মৌলিক সংখ্যা। তাছাড়া গুণের মধ্যে কোথাও ১-নেই, ০-ও নয়। পারবে না, গুণ্য আর গুণকের অঙ্ক বের করতে ? গুণের চেহারা

```
   ৭ ৭ ৫
   × ৩ ৩
----------
 ২ ৩ ২ ৫
২ ৩ ২ ৫ ×
----------
২ ৫ ৫ ৭ ৫
```

দেখো দেখি ঃ যদি এর সঙ্গে বলে দেওয়া হত, যে সংখ্যা দিয়ে গুণ করছি তার দুটো অঙ্কই এক। তাহলে কি পারতে ?

উল্টো ফল ঃ

$$\begin{array}{r} ২৬১৮ \\ \times ১১ \\ \hline ২৮৭৯৮ \end{array}$$

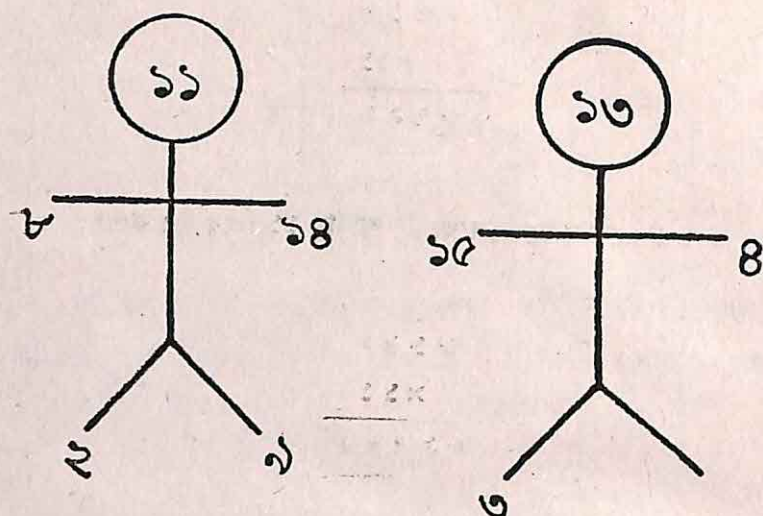
২ ৬ ১ ৮কে ঘুরিয়ে লেখো। আবার ১১ দিয়ে গুণ করো।

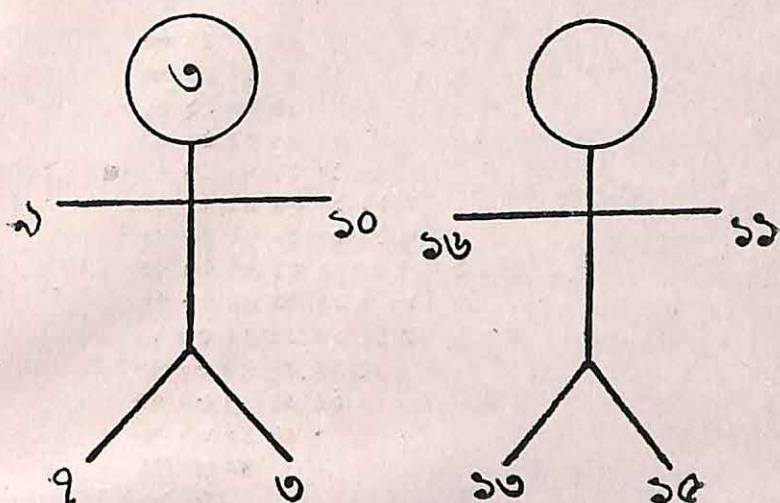
$$\begin{array}{r} ৮১৬২ \\ \times ১১ \\ \hline ৮৯৭৮২ \end{array}$$

দেখো, ফলও গেলো উল্টে।

দেখো দেখি ঃ এ রকম আর কোনো সংখ্যা কি খুঁজে বের করতে পারো ?

হ্যাঁ, পাওয়া যায় অজস্র। শুধু এইটুকু লক্ষ্য রাখতে হবে যে, পাশাপাশি দুটো অঙ্কের যোগফল না কখনোই ৯-এর চেয়ে বেশি হয়।

ফাঁকা পায়ে কত বসবে ঃ

বলতে পারো, কত বসাবো ফাঁকা পায়ে ? খেয়াল রাখো, হাতের সংখ্যার যোগফল থেকে পায়ের সংখ্যার যোগফল বাদ দিলেই মাথার সংখ্যা। তাহলে ফাঁকা পায়ে বসাবো ৩।

দেখো দেখি ঃ

বল দেখি, মাথায় কত বসবে ?

কত হবে ঃ

২৩৪ (৩৩৩) ৫৬৭
৩৪৫ (   ) ৬৭৮

লক্ষ্য করো, বন্ধনীর বাইরের বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যা বাদ দিলে তবে ভেতরের সংখ্যা মেলে।

দেখো দেখি ঃ এখন বলতে হবে নীচের বন্ধনীর ভেতরে কত বসবে ?

৩৪১ (২৫০) ৪৬৬
২৮২ (   ) ৩৯৮

সংখ্যার সারি ঃ

								৬৫
							৫০	৬৬
						৩৭	৫১	৬৭
					২৬	৩৮	৫২	৬৮
				১৭	২৭	৩৯	৫৩	৬৯
			১০	১৮	২৮	৪০	৫৪	৭০
		৫	১১	১৯	২৯	৪১	৫৫	৭১
	২	৬	১২	২০	৩০	৪২	৫৬	৭২
১	৩	৭	১৩	২১	৩১	৪৩	৫৭	৭৩
	৪	৮	১৪	২২	৩২	৪৪	৫৮	৭৪
		৯	১৫	২৩	৩৩	৪৫	৫৯	৭৫
			১৬	২৪	৩৪	৪৬	৬০	৭৬
				২৫	৩৫	৪৭	৬১	৭৭
					৩৬	৪৮	৬২	৭৮
						৪৯	৬৩	৭৯
							৬৪	৮০
								৮১

এইভাবে সারি আর স্তম্ভের সংখ্যা ক্রমশ বাড়িয়ে তোলা চলে।

লক্ষ্য করো, যে কোনো স্তম্ভের নীচের অঙ্ক স্তম্ভ-সংখ্যার বর্গ।

আর, যে কোনো সারির পর পর দুটি সংখ্যার গুণফল সেই সারিতে থাকবেই। অষ্টম সারিতে দেখো, আছে ৬ আর ১২। তাদের গুণফল ৭২, থাকবে ওই সারিতেই।

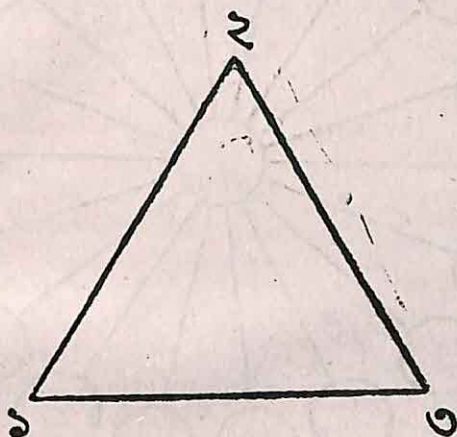
আরও বৈশিষ্ট্য আছে এই সংখ্যাচিত্রের।

৩ যে সারিতে যেখানে আছে তারপর থেকে সেই সারির প্রতিটি তৃতীয় সংখ্যা ৩ দিয়ে ভাগ করলে মিলবে।

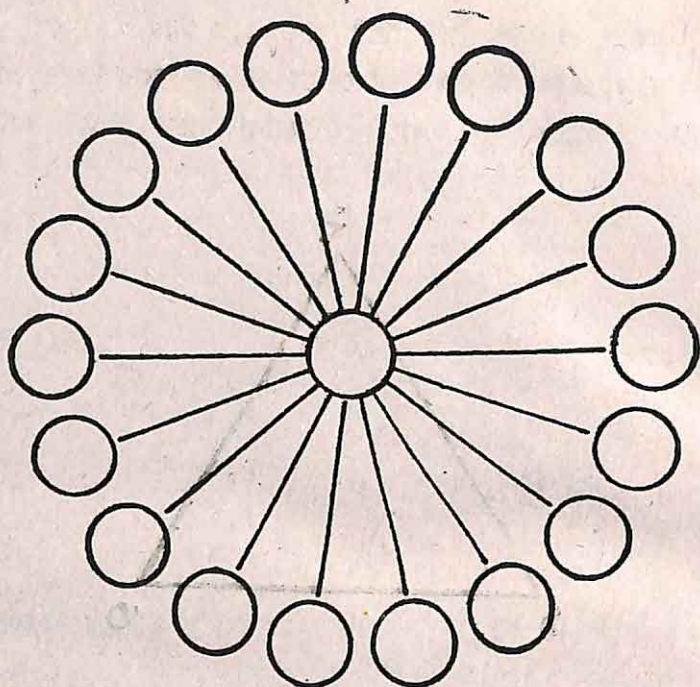
৬ যে সারিতে যেখানে আছে তারপর থেকে সেই সারির প্রতিটি ষষ্ঠ সংখ্যা, সেইরকমভাবে ৭-এর বেলায় ৭ যে সারিতে আছে, সেখান থেকে ওই সারির প্রতিটি সপ্তম সংখ্যা ৭ দিয়ে ভাগ করলে মিলবেই।

দেখো দেখি ঃ এই সংখ্যাচিত্রের আর কোনো বৈশিষ্ট্য খুঁজে পাও কিনা।

ত্রিভুজের শীর্ষে ঃ

একটা ত্রিভুজের তিন শীর্ষে আছে ১, ২ আর ৩। এখন যদি বলি ৪, ৫, ৬-কে ত্রিভুজের গা ঘেঁষে এক এক বাহুর উপরে একটি হিসেবে বসাতে হবে, যাতে যে কোনো বাহুর উপরে সংখ্যার

যোগফল সমান দাঁড়ায়, তাহলে ৬-কে বসাবো ১ আর ২-এর মাঝখানে, ৫-কে ১ আর ৩-এর মাঝে, বাকি ৪-কে ২ আর ৩-এর ভেতরে। যোগফল সব বাহুর উপরেই ৯।

দেখো দেখি ঃ ৪, ৫, ৬-এর বদলে যদি বলি ত্রিভুজের গা ঘেঁষে এক এক বাহুর পাশে দুটি হিসেবে বসাতে হবে ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ যাতে যে কোনো বাহুর উপরে যোগফল থাকে একেবারে সমান। পারবে তাহলে ? যোগফলই বা কত হবে ?

যোগফল ৩০ ঃ

১ থেকে ১৯ পর্যন্ত সংখ্যা ১৯টা বৃত্তের উপরে এমনভাবে বসাও যাতে যে কোনো সরলরেখার উপরে তিনটে বৃত্তে বসানো সংখ্যার যোগফল দাঁড়ায় ৩০।

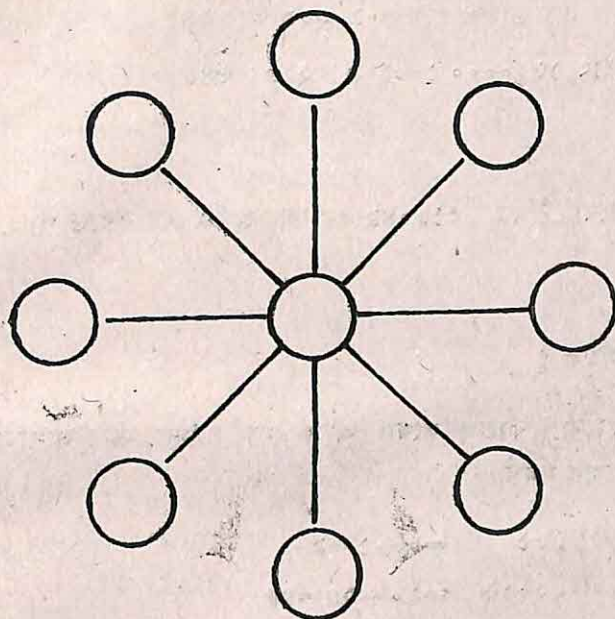
দেখো দেখি ঃ ১ থেকে ১৯-এর মাঝের সংখ্যাটি ১০।

আর ১+১৯=২০

২+১৮=২০

৩+১৭=২০

এবার সংখ্যা বসাতে নিশ্চয় আর কোনো অসুবিধা নেই।

এখন ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সংখ্যা ৯টা বৃত্তের উপরে এমনভাবে রাখো যাতে যে কোনো সরলরেখার উপরে তিনটে বৃত্তের যোগফল দাঁড়ায় ১০।

তিনটি বর্গ :

সমান্তর প্রগতিতে থাকবে এমন তিনটে বর্গ সংখ্যা বের করতে হবে। পারবে বের করতে ?

[সমান্তর প্রগতি কাকে বলে ? যদি a, b, c তিনটি সংখ্যা সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তা হলে $b-a=c-b$। ১, ৪, ৭ এই তিনটি সংখ্যা সমান্তর প্রগতিতে আছে।]

হ্যাঁ, বের করা যায়। ১, ২৫, ৪৯।

দেখো দেখি : সমান্তর প্রগতিতে থাকবে চারটে এমন বর্গ সংখ্যা কি পাওয়া যায় ? চেষ্টা করে দেখতে পারো।

ভাজক কত ঃ

১৬০০০০০১ একটি সংখ্যা। এই সংখ্যাটির কি কোনো ভাজক আছে ? পারবে বের করতে সেই ভাজককে ?

এর ভাজক হবে ১০৯, ২২৯ আর ৬৪১।

অর্থাৎ ১৬০০০০০ ১=১০৯ × ২২৯ × ৬৪১

দেখো দেখি ঃ ৩১৮০৪৯-এর ভাজক কি বের করতে পারবে ?

বর্গমূল ঃ

কোনো কোনো সংখ্যা আছে যার বর্গমূল, তার অংশবিশেষের যোগফলের সমান।

√৮১ =৮+১=৯

√২০২৫ =২০+২৫=৪৫

√৩০২৫ =৩০+২৫=৫৫

√৯৮০১ =৯৮+১=৯৯

√৮৮২০৯ =৮৮+২০৯=২৯৭

√৪৯৪২০৯=৪৯৪+২০৯=৭০৩

√৯৯৮০০১=৯৯৮+১=৯৯৯

দেখো দেখি ঃ এ রকম আর কোনো সংখ্যা কি বের করতে পারবে ?

অদ্ভুত বৈশিষ্ট্য ঃ

৬৫৬১ এবং ৮২৮১ সংখ্যা দুটির অদ্ভুত বৈশিষ্ট্য আছে। দুটো সংখ্যারই অঙ্কগুলিকে যোগ করো। করে উল্টে দাও। তাহলেই পাবে আসল সংখ্যার বর্গমূল।

$$৬৫৬১ = ৬ + ৫ + ৬ + ১ = ১৮ ; ৮১ = \sqrt{৬৫৬১}$$

$$৮২৮১ = ৮ + ২ + ৮ + ১ = ১৯ ; ৯১ = \sqrt{৮২৮১}$$

দেখো দেখি ঃ এ রকম আর কোনো সংখ্যা কি নজরে আসে ?

ঘনমূল ঃ

ছ' অঙ্কের ৫টা সংখ্যা নিয়েছি। এর প্রত্যেকটা সংখ্যার অঙ্কগুলিকে যোগ করে উল্টে দিলে যে ফল হবে, তাই হবে সংখ্যাটির ঘনমূল।

	অঙ্কের যোগফল	ঘনমূল
১৪৮৮৭৭	৩৫	৫৩
২৩৮৩২৮	২৬	৬২
৩৭৩২৪৮	২৭	৭২
৫৩১৪৪১	১৮	৮১
৫৫১৩৬৮	২৮	৮২

দেখো দেখি ঃ এ রকম আর কোনো সংখ্যা কি খুঁজে বের করা যায় ?

গুণে হারানো সংখ্যা ঃ

অনেক সংখ্যাই হারিয়ে গেছে নীচের গুণে। '×'-দিয়ে দেখানো হয়েছে সংখ্যাগুলোকে।

```
      ×১×
      ৩×২
     -----
      ×৩×
    ৩×২×
   ×২×৫
  -------
  ১×৮×৩০
```

হারানো সংখ্যাগুলিকে খুঁজে বের কর।

দেখো দেখি ঃ নীচেও ওইরকম একটি হারানো গুণ। পারবে এটির হারানো সংখ্যাগুলোকে উদ্ধার করতে ?

```
      × × ৫
      ১ × ×
    ---------
    ২ × × ৫
  ১ ৩ × ০
  × × ×
 ---------
 ৪ × ৭ ৭ ×
```

৮-এর খেলা :

তিনটি ৮ দিয়ে ২৪ তৈরি করা কোনো সমস্যাই নয়।

$$৮+৮+৮=২৪$$

কিন্তু আটটা ৮ দিয়ে ১০০০ ?

তাও করা যায়।

$$৮৮৮+৮৮+৮+৮+৮=১০০০।$$

দেখো দেখি : ৮-এর বদলে তিনটে অন্য কোনো একই সংখ্যা দিয়ে ২৪ তৈরি করতে পারবে ?

করো ১০০ :

শুধু, ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮ নাও। আর কেবল যোগ আর বিয়োগের চিহ্ন ব্যবহার করো। ফল হিসেবে আনতে হবে ১০০।

কি ভাবে করা যায় ?

হ্যাঁ, যায়, যদি লিখি

$$৮৬+২+৪+৫+৭-১-৩=১০০$$

দেখো দেখি : যোগ, বিয়োগ আর সেই সঙ্গে গুণ, ভাগের চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে। ওই সংখ্যা কটা দিয়ে, দেখো দেখি, ১০০ করতে পারো কিনা।

আসে ৩৭ঃ

৫৫৫ কে ভাগ করো ৫+৫+৫ দিয়ে। ফল ৩৭।
৩৩৩ কে ভাগ করো ৩+৩+৩ দিয়ে। ফল ৩৭।
৮৮৮ কে ভাগ করো ৮+৮+৮ দিয়ে। ফল ৩৭।

দেখো দেখিঃ এ ধরনের তিন অঙ্কের যে কোনো সংখ্যার বেলাতেই কি ফল আসবে ৩৭?

একাধিক বৈশিষ্ট্যঃ

১৬২, ২৪৩, ৩২৪, ৩৯২, ৫১২, ৬৪৮, ৯৭২

এই সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিকে সেই সংখ্যার অঙ্কগুলির যোগফল দিয়ে ভাগ করলে মিলবে। শুধু তাই নয়, প্রত্যেক সংখ্যার অঙ্কগুলির যোগফলের বর্গ দিয়ে সেই সংখ্যাকে ভাগ করলেও মেলে।

৩৯২ ধরা যাক।

৩+৯+২=১৪। ১৩ দিয়ে ভাগ করলে সংখ্যাটি মিলে যাবে। আর ১৪-এর বর্গ ১৯৬। তা দিয়ে ভাগ করলেও মিলবে।

দেখো দেখিঃ চার অঙ্কেরও এ-রকম কয়েকটি সংখ্যা আছে। কয়েকটি হল ১২৯৬, ২১৫৬, ২৯১৬। তুমি কয়েকটা বের করো।

একটি সংখ্যাচিত্র ঃ

১ . ৮ + ১ = ৯

১ ২ . ৮ + ২ = ৯ ৮

১ ২ ৩ . ৮ + ৩ = ৯ ৮ ৭

১ ২ ৩ ৪ . ৮ + ৪ = ৯ ৮ ৭ ৬

১ ২ ৩ ৪ ৫ . ৮ + ৫ = ৯ ৮ ৭ ৬ ৫

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ . ৮ + ৬ = ৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ . ৮ + ৭ = ৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ . ৮ + ৮ = ৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯ . ৮ + ৯ = ৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১

দেখো দেখি ঃ যদি বাঁ দিকে ৮-এর বদলে বরাবর ৯ দিয়ে গুণ করতাম আর যদি ১, ২, ৩, ৪···যোগ করে যেতাম তাহলে কি একটি নতুন সাজের রেখাচিত্র পেতাম ?

চারটি ৯ ঃ

চারটি ৯ দিয়ে ১০০ তৈরি করতে পারবে? হ্যাঁ, সহজেই করা যায়।

$$৯৯+\frac{৯}{৯}।$$

কি, হয়েছে?

দেখো দেখি ঃ এখন তিনটে ৫ দিয়ে ৫-ই তৈরি করতে হবে। কি ভাবে করবে?

উল্টে যাবে ঃ

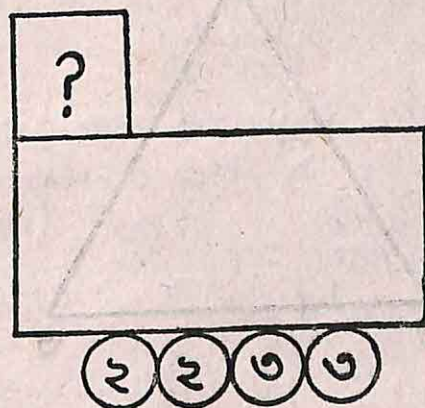
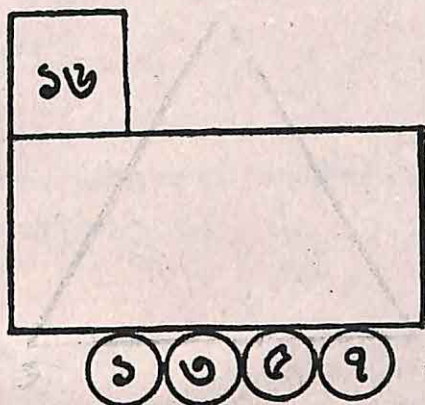
এমন একটা সংখ্যা বল যেটাকে ২ দিয়ে গুণ করে ২ যোগ করলে উল্টে যাবে। মনে রাখবে, সংখ্যাটি এই ধরনের সবচেয়ে ছোট সংখ্যা।

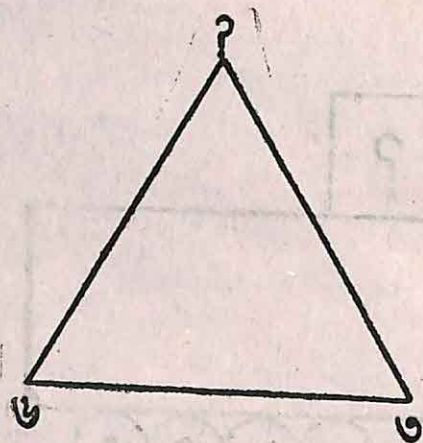
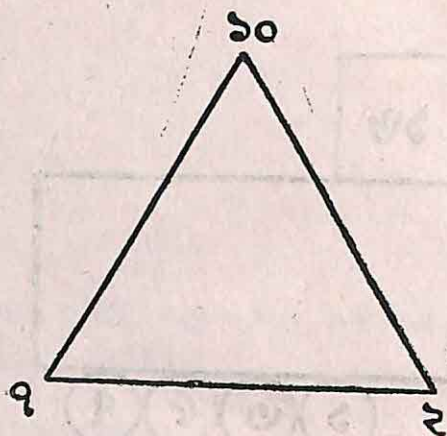
সংখ্যাটি নিশ্চয় ২৫।

কারণ ২৫ × ২ + ২ = ৫২।

দেখো দেখি ঃ আরও এ ধরনের কোনো সংখ্যা কি বের করতে পারবে?

কত বসবে ঃ

জিজ্ঞাসা চিহ্ন যেখানে আছে সেখানে কত বসাবো ?

চাকার সংখ্যা যোগ করলে মাথার সংখ্যার সমান হবে। অর্থাৎ জিজ্ঞাসা চিহ্ন যেখানে, সেখানে বসাবো ১০।

দেখো দেখি ঃ

জিজ্ঞাসা চিহ্ন যেখানে সেখানে কত বসাবে ?

কত হবে :

একটা সংখ্যা, তার অর্ধেক, তারও অর্ধেক মিলে হলো ১। সংখ্যাটি কত ?

বলতে পারবে ?

সংখ্যাটি হবে $\frac{৪}{৭}$

দেখো দেখি : একটা সংখ্যা, তার দ্বিগুণ, তারও দ্বিগুণ মিলে হলো ১। সংখ্যাটি কত ?

বিভাজক হবে ১০০ :

এমন সংখ্যা কি বের করতে পারবে, যার বিভাজকের সংখ্যা ১০০ ?

কয়েকটা সংখ্যা হয়, তবে সবচেয়ে ছোট যে সংখ্যাটা হবে, সেটা হলো ৪৫৩৬০।

দেখো দেখি : আরও একটা সংখ্যা বের করো, যার বিভাজকের সংখ্যা ১০০। ৪৫৩৬০ কে উৎপাদকে ভেঙ্গে নাও। তাহলে হয়তো একটা সূত্র পাবে।

সবই আসবে ১ঃ

১.৯+ ২=১১

১২.৯+ ৩=১১১

১২৩.৯+ ৪=১১১১

১২৩৪.৯+ ৫=১১১১১

১২৩৪৫.৯+ ৬=১১১১১১

১২৩৪৫৬.৯+ ৭=১১১১১১১

১২৩৪৫৬৭.৯+ ৮=১১১১১১১১

১২৩৪৫৬৭৮.৯+ ৯=১১১১১১১১১

১২৩৪৫৬৭৮৯.৯+১০=১১১১১১১১১১

দেখো দেখি ঃ যদি বাঁ দিকে ১২৩৪৫৬৭৮৯০ কে ৯ দিয়ে গুণ করতে, তাহলে ১০-এর বদলে কত নিলে ডান দিকে সব কটা অঙ্কই ১ আসতো ? কেন নিচ্ছো পারলে তাও বলার চেষ্টা কোরো।

গুণ হলো যোগের উল্টো ঃ

৯+৯=১৮ ;   ৯×৯=৮১

২৪+৩=২৭ ;   ২৪×৩=৭২

৪৭+২=৪৯ ;   ৪৭×২=৯৪

৪৯৭+২=৪৯৯ ;   ৪৯৭×২=৯৯৪

দেখো দেখি ঃ আর কোনো এ রকম সংখ্যা কি বের করতে পারবে ?

অদ্ভুত সংখ্যা ঃ

৪৮ সংখ্যাটা অদ্ভুত, এতে কোনো সন্দেহ নেই। ১ যোগ করলে যোগফল হবে ৪৯—তা হলো ৭-এর বর্গ। ৪৮-এর অর্ধেক নাও এবারে। হলো ২৪। ১ যোগ করলে ২৫। অর্থাৎ আবার একটা বর্গ সংখ্যা।

৪৮ এর পরের এ ধরনের সংখ্যা ১৬৮০।

দেখো দেখি ঃ তার পরের সংখ্যাটা কি খুঁজে বের করতে পারবে ?

৫৭, ১১৫-এর পর থেকে কয়েকটা সংখ্যা পরীক্ষা করে দেখো।

পাঁচ জোড়া ঃ

১ থেকে ০ পর্যন্ত ১০ টা অঙ্ককে পাঁচ জোড়ায় এমনভাবে সাজাও, যাতে সবচেয়ে ছোট সংখ্যা দিয়ে বাকি চারটা জোড়ার সংখ্যাগুলিকে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে শূন্য।

একটু চেষ্টা করলেই দেখতে পাবে সংখ্যাগুলি হবে ১৮, ৩৬, ৫৪, ৭২, ৯০।

দেখো দেখি ঃ **আর এ রকম পাঁচটা সংখ্যা কি করা সম্ভব জোড়ায় জোড়ায় অঙ্ক নিয়ে?**